1. FICHA 2: Cálculo de límites. Indeterminaciones.

Cuestión 1: Determina razonadamente el valor de los siguientes límites:

$$a.\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^4+x^2-x-1}{x^3-x^2+x-1} \qquad b.\quad \lim_{x\to 2}\frac{2x-\sqrt{4x+8}}{x^2-4}$$

$$c.\quad \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-x}{x^2-3x} \qquad d.\quad \lim_{x\to -1}\frac{1-2x}{x^2-1}$$

$$e.\quad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x^2-1}$$

Cuestión 2: Determina el valor de los siguientes límites, cuando x tiende a $+\infty$ y cuando x tiende a $-\infty$, indicando previamente el tipo de indeterminación:

$$a.\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^4+3x^2+2}{5x^2+4} \qquad b.\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2}{x+2}-\frac{4x^3}{x-2}\right)$$

$$c.\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1+x^2}\cdot\left(\frac{x^2+1}{3x}-2\right) \qquad d.\ \lim_{x\to\infty}\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}$$

$$e.\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{2x+3} \qquad f.\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{8x^3-2x+3}}{\sqrt{3x^2-3x+5}}$$

Cuestión 3: Calcula los siguientes límites:

$$a.\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}} \qquad b.\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^{\frac{4x}{1+x^2}}$$

$$c.\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{2x^2}{1+x}} \qquad d.\quad \lim_{x\to 0}\left(1+sen(x)\right)^{cotag(x)}$$

$$e.\quad \lim_{x\to -1}\left(\frac{x^2+3x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{2}{1+x}} \qquad f.\quad \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2^x+3^x}{3^x}\right)^{\pi^x}$$

Cuestión 4: Determina el valor de los siguientes límites:

$$a.\quad \lim_{x\to\infty}\frac{ln(1+x)}{x} \qquad b.\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{3^x} \qquad c.\quad \lim_{x\to\infty}\frac{ln^2(x)}{x^3} \qquad d.\quad \lim_{x\to\infty}\frac{ln(1+x)}{e^x}$$

$$e.\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2^x+3^x}{5^x} \qquad f.\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{10^x} \qquad g.\quad \lim_{x\to\infty}x\cdot e^x \qquad h.\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{ln(x)}$$

Límites de funciones: resolución de indeterminaciones

A continuación se detallan los procesos seguidos para la resolución de los límites propuestos en el aula. Recordemos que las indeterminaciones más importantes son:

$$\frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad 0\cdot\infty, \qquad \infty-\infty, \qquad 1^{\pm\infty}, \qquad 0^0$$

Cada una de estas indeterminaciones se debe resolver con las técnicas estudiadas que mejor se adapten a cada caso. Se deben indicar todos los pasos seguidos en el proceso, usando la notación matemática con propiedad.

Cuestión a: *Calcular el valor del límite,*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+3x}{3^x}$$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+3x}{3^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{3^x}+\frac{3x}{3^x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}\right)^x+\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{3^{x-1}}\right)=0$$

donde se han hecho uso de las propiedades generales:

$$Si \quad 0<a<1\to\lim_{x\to+\infty}a^x=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=0, \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

Por tanto el límite pedido es 0.

Cuestión b: *Calcular el valor del límite,*

$$\lim_{x\to+1}\frac{x^3-1}{x^2+6x-7}$$

Solución: Al sustituir la variable independiente por $x=1$, obtenemos

$$\lim_{x\to+1}\frac{x^3-1}{x^2+6x-7}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

una indeterminación. Para resolverla factorizamos los polinomios del numerador y del denominador, obteniendo

$$x^3-1=(x-1)\cdot(x^2+x+1), \qquad x^2+6x-7=(x-1)\cdot(x+7)$$

Por tanto, podremos escribir:

$$\lim_{x\to+1}\frac{\cancel{(x-1)}\cdot(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}\cdot(x+7)}=\lim_{x\to+1}\frac{x^2+x+1}{x+7}=\frac{3}{8}$$

Cuestión c: *Calcular el valor del límite,*

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}, \qquad a>0$$

Solución: Al sustituir la variable independiente por $x=a$, obtenemos

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

una indeterminación. Para resolverla multiplicamos numerador y denominador por la expresión conjugada del numerador,

$$\overline{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = \sqrt{x}+\sqrt{a}$$

obteniendo

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \lim_{x\to a} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^2}{(x-a)\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \lim_{x\to a} \frac{\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \lim_{x\to a} \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{2a}, \qquad \forall a>0$$

que es la solución esperada.

Cuestión d: *Calcular el valor del límite,*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x}-(x-2)}{x-2}$$

Solución: Observamos que en el numerador se presenta una indeterminación del tipo $\infty-\infty$. Deberíamos multiplicar y dividir por el conjugado del numerador,

$$\overline{\sqrt{x^2-2x}-(x-2)} = \sqrt{x^2-2x}+(x-2)$$

No obstante, podemos efectuar la siguiente manipulación algebraica que nos conduce igualmente al resultado correcto.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x}-(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-2} - \frac{x-2}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-2} - 1$$

Ahora bien, el primer límite es sencillo de calcular, comparando grados o bien fijándonos exclusivamente en los monomios de mayor grado:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|}{x} = 1$$

Por consiguiente el límite pedido es:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x}-(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-2}-1=1-1=0$$

Cuestión e: *Calcular el valor del límite,*

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$$

Solución: Al sustituir el valor de la variable independiente $x=0$, obtenemos una indeterminación del tipo

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=1^{+\infty}$$

relacionada con el *número e.* Para resolver la indeterminación, aplicamos la conocida fórmula

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=e^{\lim_{x\to a}g(x)\cdot(f(x)-1)}$$

que en este caso, se traduce en,

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot(1+2x-1)}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}}=e^2$$

En definitiva,

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=e^2$$

Cuestión f: *Calcular el valor del límite,*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+3}{x}}$$

Solución: Observamos que se trata de una indeterminación del tipo $1^{+\infty}$. Operamos como el caso previo, aplicando la fórmula:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+3}{x}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{x}\cdot\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}-1\right)}=$$
$$=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{x}\cdot\left(\frac{x^2+x+1-x^2-1}{x^2+1}\right)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot(x^2+3)}{x\cdot(x^2+1)}}=$$
$$=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{x^2+1}}=e^1=e$$

donde en el último paso se han comparado grados en el exponente.

Cuestión g: *Calcular el valor del límite,*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$$

Solución: Observamos que al sustituir el valor de la variable independiente, $x = 0$, obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

una indeterminación. En este caso, para resolver el límite, debemos multiplicar numerador y denominador por el conjugado del numerador, obteniendo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{3x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-\left(\sqrt{1-x}\right)^2}{3x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-(1-x)}{3x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{3x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{3\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = \frac{2}{3\cdot\left(\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}\right)} = \frac{2}{3\cdot 2} = \frac{1}{3}$$

<u>Cuestión h:</u> *Determinar el valor de "a", para que el límite,*

$$\lim_{x\to +\infty} \left(2x-\sqrt{4x^2+ax+1}\right) = 1$$

Solución: Observamos que el límite presenta una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Para resolverla, multiplicamos y dividimos la expresión dada, por su conjugado,

$$\lim_{x\to +\infty} \left(2x-\sqrt{4x^2+ax+1}\right)\cdot\frac{2x+\sqrt{4x^2+ax+1}}{2x+\sqrt{4x^2+ax+1}} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(2x-\sqrt{4x^2+ax+1}\right)\cdot\left(2x+\sqrt{4x^2+ax+1}\right)}{2x+\sqrt{4x^2+ax+1}} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{(2x)^2-\left(\sqrt{4x^2+ax+1}\right)^2}{2x+\sqrt{4x^2+ax+1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{4x^2-(4x^2+ax+1)}{2x+\sqrt{4x^2+ax+1}} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{-ax-1}{2x+\sqrt{4x^2+ax+1}}$$

Fijándonos en las potencias de mayor grado, dicho límite vale,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{-ax-1}{2x+\sqrt{4x^2+ax+1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-ax}{2x+2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-ax}{4x} = -\frac{a}{4}$$

Si queremos que dicho límite valga 1, como se indica en el enunciado, plantemos la ecuación:

$$\boxed{\frac{-a}{4} = 1 \leftrightarrow a = -4}$$

que es la solución pedida.

<u>**Cuestión i:**</u> *Determinar el valor del límite,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{|x|}$$

Solución: En primer lugar debemos aplicar la definición de *valor absoluto,*

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Por tanto, la función dada $f(x) = \frac{sen(x)}{|x|}$, es una función a trozos que debe expresarse en la forma:

$$\frac{sen(x)}{|x|} = \begin{cases} \frac{sen(x)}{x} & si \quad x \geq 0 \\ -\frac{sen(x)}{x} & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Para calcular el límite cuando $x \to 0$, debemos calcular los límites laterales. El límite lateral por la derecha es:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{sen(x)}{|x|} = \lim_{x\to 0, x>0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

En cambio, el límite lateral por la izquierda sería:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{sen(x)}{|x|} = \lim_{x\to 0, x<0} -\frac{sen(x)}{x} = -1$$

Los límites laterales no coinciden, como se aprecia en la gráfica. Por consiguiente no existe el límite pedido.

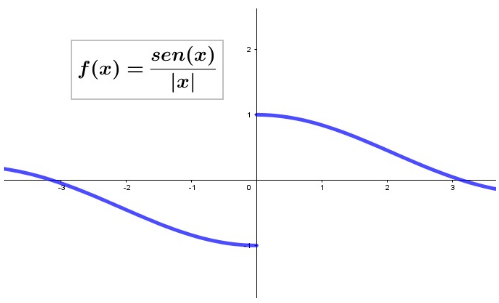

Figura 1: *Se observa que los límites laterales en $x = 0$ no coinciden.*